

ETUDE SPECTRALE DES MECANISMES D'ECHANGE ENTRE CHAMP CINEMATIQUE ET CHAMP SCALAIRES

CLAUDE REY* et JEAN MATHIEU†
Ecole Central de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Fluids, 69130 Ecully, France

(Received 3 November 1977)

Résumé—A l'époque actuelle, les transferts de chaleur et de masse dans les écoulements turbulents sont d'un très grand intérêt, tout spécialement quand le nombre de Prandtl ou le nombre de Schmidt est très différent de 1. Nous présentons tout d'abord quelques résultats concernant les champs turbulents isotropes quand les termes de transferts sont négligés. Des relations simples entre les deux champs peuvent être mises en évidence si on suppose que le champ thermique est nécessairement contrôlé par le champ cinématique. Avec un modèle simple concernant les termes de transferts, on obtient une solution approximative valable pour l'ensemble du spectre. Cependant, une telle solution ne peut pas donner d'informations précises quant au rôle joué par le nombre de Prandtl ou le nombre de Schmidt sur les petites structures turbulentes. Un intérêt spécial est porté sur les petites structures en supposant un état d'équilibre et en introduisant un certain nombre de réajustements classiques, une forme spectrale est donnée pour les quantités scalaires. En choisissant une échelle de temps convenable, cette solution générale est conforme à celle donnée par Batchelor et Corrsin.

NOMENCLATURE

- $F(k, t)$, spectre tridimensionnel d'énergie ;
 $F_{u,u}(k_1, t)$, spectre unidimensionnel dans la direction k_1 , des fluctuations de la composante u_i de la vitesse ;
 $F_{uu}(k_1, t)$, spectre unidimensionnel dans la direction k_1 , des fluctuations scalaires ;
 $g_n(k)$, fonction du nombre d'onde ;
 $G(k, t)$, spectre tridimensionnel des quantités scalaires ;
 $H_n(x)$, polynôme d'Hermite ;
 $H(k, t)$, spectre tridimensionnel de transfert scalaire ;
 k , module du nombre d'onde ;
 k_1 , projection du nombre d'onde dans la direction 1 ;
 L, L_{η} , échelle intégrale de longueur cinématique et scalaire ;
 Pr , nombre de Prandtl ;
 $q'^2, = u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2$ et $u_i' = (u_i^2)^{1/2}$;
 $Q_{ii}(r, t), = \overline{u_i(P) \cdot u_i(P^*)}$;
 $Q_{uu}(r, t), = \overline{\theta(P) \cdot \theta(P^*)}$;
 $r^2, = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \bar{P} \bar{P}^{*2}$;
 Re_i , nombre de Reynolds de la turbulence ;
 $S_{iKi}, = \overline{u_i(P) \cdot u_K(P) \cdot u_i(P^*)}$;
 $S_{\theta K\theta}, = \overline{\theta(P) \cdot u_K(P) \cdot \theta(P^*)}$;
 Sc , nombre de Schmidt ;
 $T(k, t)$, spectre tridimensionnel de transfert cinématique ;
 u_1, u_2, u_3 , composantes de la fluctuation du vecteur vitesse instantané ;
 v_K , échelle de vitesse de Kolmogorov ;
 x_1, x_2, x_3 , référentiel de base orthonormé.

Symboles grecs

- α , constante de Kolmogorov ;
 β , constante d'Obukhov-Corrsin ;
 γ , coefficient de diffusivité du champ scalaire ;
 ϵ , dissipation ;
 ϵ_{θ} , égalisation scalaire ;
 $\eta, = \left(\frac{v^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$, $\eta_C = \left(\frac{\gamma^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$, $\eta_B = \left(\frac{v\gamma^2}{\epsilon} \right)^{1/4}$, échelles de longueur de Kolmogorov, Corrsin et Batchelor ;
 η_{ν} , échelle de longueur scalaire, du type Kolmogorov ;
 θ , fluctuation des quantités scalaires $\theta' = (\bar{\theta}^2)^{1/2}$;
 θ_K , échelle scalaire du type Kolmogorov ;
 λ, λ_{ν} , microéchelles de Taylor cinématique et scalaire ;
 ν , viscosité cinématique ;
 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , composantes de $\bar{P} \bar{P}^*$.
 $\sigma(k, t)$, taux de transfert donnant le flux à travers le nombre d'onde k ;
 $\tau, = (v/\epsilon)^{1/2}$, temps caractéristique du transfert spectral ;
 $\chi_q, = r/(8vt)^{1/2}$, $\chi_a = r/(8\gamma t)^{1/2}$, variables physiques adimensionnelles.

LES PROBLÈMES de transfert de chaleur et de masse ont retenu depuis longtemps l'attention des industriels et des chercheurs. L'idée de se référer pour les traiter à la cinématique du champ, a conduit à l'analogie de Reynolds qui ne cesse pas d'être utile au moins dans les cas simples. La fragilité de cette approche fut signalée il y a vingt ans environ, quand fut mise en doute la réalité physique du coefficient de diffusion turbulente introduit par Boussinesq. Fondamentalement l'assimilation d'un transfert d'une quantité scalaire au transfert d'une quantité vectorielle paraît délicate ne serait-ce que si l'on se place au niveau de l'homogénéité

*Maitre assistant.

† Professeur.

mathématique du problème. Des comparaisons entre grandeur de même nature tensorielle paraîtraient plus plausibles et c'est ce que suggèrent Fulachier et Dumas [1] une certaine évidence algébrique apparaissant lors d'une comparaison dans le cadre de champs turbulents homogènes [2].

L'histoire d'un scalaire dépend d'autant plus de la cinématique sous-jacente que les nombres de Prandtl ou de Schmidt sont voisins de l'unité. Une meilleure compréhension des phénomènes implique nécessairement l'emploi de fluides particuliers présentant des propriétés moléculaires susceptibles d'assurer un certain découplage: si le nombre de Prandtl ou de Schmidt est très petit les phénomènes de diffusion l'emporteront, dans le cas contraire ($Pr \approx Sc \approx 1$) le rôle de la cinématique doit être important quelles que soient les échelles concernées.

On s'efforcera de relier entre elles les idées qui ont pu être émises concernant les mécanismes, en se plaçant le plus souvent dans l'espace spectral. Malheureusement une certaine pénurie de résultats expérimentaux fiables se fait sentir, aussi bien lorsqu'il s'agit d'étudier l'évolution de quantités scalaires dans la période finale de la turbulence, que lorsqu'on cherche à déterminer l'évolution, de ces mêmes champs scalaires, dans des fluides à nombre de Prandtl ou de Schmidt très différents de l'unité.

I. REMARQUES CONCERNANT LA PÉRIODE FINALE D'ÉVOLUTION DE LA TURBULENCE ISOTROPE

Dans un premier temps on s'efforcera de tirer un certain nombre d'information des équations de corrélation en deux points P et P^* distants de $r(\xi_i)$ pour les champs cinématiques et scalaires:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{ii} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{ik} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} Q_{ii} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{\theta\theta} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{\theta k} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} Q_{\theta\theta} \quad (2)$$

Dans le cas où les effets non linéaires sont négligés, il existe alors des solutions exactes aux relations simplifiées:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{ii} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} Q_{ii} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{\theta\theta} = 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} Q_{\theta\theta} \quad (4)$$

données par Agostini et Bass [3] sous la forme:

$$Q_{ii}(r, t) = \left[\frac{A_1}{t^{3/2}} H_1(\chi_q) + \frac{A_2}{t^{5/2}} H_3(\chi_q) + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{A_p}{t^{p+1/2}} H_{2p-1}(\chi_q) \right] \exp(-\chi_q^2) \quad (5)$$

$$Q_{\theta\theta}(r, t) = \left[\frac{B_1}{t^{3/2}} H_1(\chi_\theta) + \frac{B_2}{t^{5/2}} H_3(\chi_\theta) + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{B_p}{t^{p+1/2}} H_{2p-1}(\chi_\theta) \right] \exp(-\chi_\theta^2) \quad (6)$$

où les H_{2p-1} sont les polynômes d'Hermite, $\chi_q = r/(8vt)^{1/2}$, $\chi_\theta = r/(8\gamma t)^{1/2}$.

L'ajustement des constantes intervenant dans ces solutions devra tenir compte entre autre de l'équation de continuité. Cette dernière implique la nullité de l'intégrale du moment d'ordre deux soit:

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{ii} dr = \frac{A_1}{2} (8v)^{3/2} \pi^{1/2} = 0 \quad (7)$$

d'où $A_1 = 0$. Pour le moment d'ordre quatre il vient alors:

$$\int_0^{\infty} r^4 Q_{ii} dr = -\frac{3A_1}{4} \pi (8v)^{5/2} t + 3A_2 \pi^{1/2} (8v)^{5/2} = 3A_2 \pi^{1/2} (8v)^{5/2} = C^{\text{ste}} \quad (8)$$

Dans ce cas particulier cette intégrale est invariante, les moments d'ordre supérieur donnant des fonctions du temps si $A_2 \neq 0$. En bref on peut dire que la nullité de l'intégrale d'un moment conditionne en partie la géométrie de la courbe de corrélation, tandis que la constante de l'intégrale suppose une certaine dynamique des structures.

Parallèlement on trouve pour le champ scalaire:

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{\theta\theta} dr = \frac{B_1}{2} (8\gamma)^{3/2} R^{1/2} \quad (9)$$

et

$$\int_0^{\infty} r^4 Q_{\theta\theta} dr = -\frac{3}{4} B_1 \pi (8\gamma)^{5/2} t + 3B_2 \pi^{1/2} (8\gamma)^{5/2} \quad (10)$$

De même que l'incompressibilité du fluide entraîne une condition sur la constante A_1 , soit $A_1 = 0$, une condition physique doit être recherchée de façon à déterminer la constante B_1 relative au champ scalaire.

Pour $t \rightarrow \infty$ et $r = 0$ les solutions 5 et 6 donnent compte tenu de (7):

$$q'^2(t) \sim \frac{12A_2}{t^{5/2}}, \quad \theta'^2(t) \sim \frac{2B_1}{t^{3/2}}$$

ce qui entraînerait:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta'^2(t)}{q'^2(t)} = \infty$$

ceci laisserait penser qu'il puisse exister des fluctuations du champ scalaire θ , sans fluctuation de vitesse, situation que nous rejeterons.

En conséquence nous penserons que la limite du rapport $\theta'^2(t)/q'^2(t)$ doit être finie ou à la rigueur nulle, condition qui entraîne la nullité de la constante B_1 intervenant dans la solution scalaire (6). Par suite, l'invariant de Corrsin [4] pour les quantités scalaires est nul, soit:

$$\int_0^{\infty} r^2 Q_{\theta\theta}(r, t) dr = 0 \quad (11)$$

et d'après (10)

$$\int_0^{\infty} r^4 Q_{\theta\theta}(r, t) dr = 3B_2 \pi^{1/2} (8\gamma)^{5/2} = C^{\text{ste}} \quad (12)$$

ce qui introduit un nouvel invariant scalaire analogue à l'invariant cinématique (8) dans le cas particulier de la période finale de la turbulence scalaire.

Les équations de bilan spectral écrites dans ce même cas particulier où les termes de transfert sont négligés deviennent:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = -2vk^2 F(k, t) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(k, t) = -2\gamma k^2 G(k, t) \quad (14)$$

leur solution exacte, compte tenu des considérations physiques précédentes est donnée par [2, 5]:

$$F(k, t) = -128A_2(2v/\pi)^{1/2}k^4 \exp(-2vk^2t) \quad (15)$$

$$G(k, t) = -128B_2(2\gamma/\pi)^{1/2}k^4 \exp(-2\gamma k^2t). \quad (16)$$

Les relations de passage entre les structures du champ scalaire et celles du champ cinématique s'écrivent dans l'espace spectral:

$$\begin{aligned} G(k/\gamma^{1/2}, t) &= Pr^{-1/2}(B_2/A_2)F(k/v^{1/2}, t) \\ &= Pr^{-1/2}(\theta'^2/q'^2)F(k/v^{1/2}, t) \end{aligned} \quad (17)$$

et dans l'espace physique

$$Q_{\theta\theta}(r\gamma^{1/2}, t) = (\theta'^2/q'^2)Q_{\theta\theta}(rv^{1/2}, t). \quad (18)$$

La liaison entre les deux champs cinématique et scalaire est donc explicitée dans ce cas particulier de la turbulence isotrope examinée dans sa période finale.

II. ETUDE PHENOMENOLOGIQUE DES FONCTIONS SPECTRALES F ET G DANS LE CAS DE LA TURBULENCE ISOTROPE

On sait par les résultats expérimentaux que les grosses structures des spectres cinématiques et thermiques vont rester sensiblement liées, cette dépendance ne subsistera pas pour les petites structures qui vont se différencier fortement suivant la valeur du nombre de Prandtl. On peut dans ce cas prendre en considération le spectre de transfert à travers un modèle du type Onsager que l'on écrira

$$\frac{F(k, t)}{F(k_0, t)} = \frac{k_0 \frac{d}{dt} \ln \eta + \sigma(k_0, t)}{k \frac{d}{dt} \ln \eta + \sigma(k, t)} \exp - \int_{k_0}^k \frac{2vk^2 + \frac{d}{dt} \ln F_1(t) - \left[1 + (1-a) \frac{\partial \ln F_2(kL)}{\partial \ln k} \right] \frac{d}{dt} \ln \eta}{k \frac{d}{dt} \ln \eta + \sigma(k, t)} dk \quad (25)$$

$$\frac{G(k, t)}{G(k_0, t)} = \frac{k_0 \frac{d}{dt} \ln \eta_0 + \sigma_0(k_0, t)}{k \frac{d}{dt} \ln \eta_0 + \sigma_0(k, t)} \exp - \int_{k_0}^k \frac{2\gamma k^2 + \frac{d}{dt} \ln G_1(t) - \left[1 + (1-b) \frac{\partial \ln G_2(kL_0)}{\partial \ln k} \right] \frac{d}{dt} \ln \eta_0}{k \frac{d}{dt} \ln \eta_0 + \sigma_0(k, t)} dk \quad (26)$$

où k_0 est très voisin de zéro. Ces relations contiennent chacune trois fonctions inconnues soient $\sigma(k, t)$, $F_1(t)$ et $F_2(kL)$ [ou $\sigma(k, t)$, $G_1(t)$ et $G_2(kL_0)$ pour le champ scalaire]. Ces inconnues seront déterminées à l'aide de contraintes de nature physique telles que:

le spectre croît en k^4 à l'origine ; le spectre décrit la zone inertielle en $k^{-5/3}$; le spectre décroît aux très grands nombres d'onde suivant:

$$\exp\left(-\frac{2\alpha}{n}(k\eta)^n\right)$$

$$T = -\frac{\partial}{\partial k} \sigma(k, t) F(k, t) \quad (19)$$

$$H = -\frac{\partial}{\partial k} \sigma_0(k, t) G(k, t). \quad (20)$$

Nous nous attacherons plus spécialement au type de liaison possible entre champs scalaires et champ de vitesse. On peut tenter de résoudre les équations de bilan spectral

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) - T(k, t) = -2vk^2 F(k, t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G(k, t) - H(k, t) = -2\gamma k^2 G(k, t) \quad (22)$$

par une schématisation de la solution. Pour un nombre de Reynolds Re , suffisamment grand celle-ci sera mise sous la forme [5]:

$$F(k, t) = F_1(t) \cdot F_2(kL) \cdot F_3(k\eta) \quad (23)$$

$$G(k, t) = G_1(t) \cdot G_2(kL_0) \cdot G_3(k\eta_0) \quad (24)$$

où L et L_0 sont des échelles intégrales de longueur, dépendantes du temps, correspondant à une hypothèse de similitude sur les grosses structures du spectre, η et η_0 sont des échelles caractéristiques des petites structures correspondant à une hypothèse de similitude sur les petites structures. Ainsi se trouvent introduites deux métriques correspondant chacune à une région du spectre. Si ces deux métriques sont soit constantes, soit des fonctions puissance du temps, elles sont reliées par:

$$a \frac{d}{dt} \ln \eta = \frac{d}{dt} \ln L$$

et

$$b \frac{d}{dt} \ln \eta_0 = \frac{d}{dt} \ln L_0$$

où a et b sont des constantes à déterminer. La solution des équations est alors donnée sous la forme [5]:

ou

$$\exp\left(-\frac{2\beta}{m}(k\eta_o)^m\right)$$

pour le champ scalaire.

Les constantes d'intégration peuvent être déterminées par normalisation du spectre

$$\int_0^\infty \frac{F(k, t)}{3u'^2} dk = \int_0^\infty \frac{G(k, t)}{\theta'^2} dk = 1$$

en relation directe avec l'expression de la "dissipation":

$$\int_0^\infty \frac{vk^2 F(k, t)}{\epsilon} dk = \int_0^\infty \frac{\gamma k^2 G(k, t)}{\epsilon_o} dk = \frac{1}{2}.$$

On choisira comme modèle de transfert compatibles avec les conditions énumérées:

$$\sigma(k, t) = \frac{v(k\eta)^{5/3}}{\alpha\eta^3} - k \frac{d}{dt} \ln L$$

et

$$\sigma_o(k, t) = \frac{\gamma(k\eta_o)^{5/3}}{\beta\eta_o^3} - k \frac{d}{dt} \ln L_o.$$

On retrouve alors, parmi les solutions cinématiques les plus simples, la solution empirique donnée par Helland [6, 7] à partir de relations de Von Karman [8] et Pao [9]

$$F(k, t) = \alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} \frac{(kL)^4}{[1 + (kL)^2]^{17/6}} \exp[-\frac{3}{2}\alpha(k\eta)^{4/3}] \quad (27)$$

qui correspond à un spectre de transfert déterminé:

$$T(k, t) = -\frac{\partial}{\partial k} \left\{ \left(\frac{\epsilon^{1/3} k^{5/3}}{\alpha} - k \frac{d}{dt} \ln L \right) \left(\frac{\alpha \epsilon^{2/3} L^{5/3} (kL)^4}{[1 + (kL)^2]^{17/6}} \exp[-\frac{3}{2}\alpha(k\eta)^{4/3}] \right) \right\}. \quad (28)$$

Le spectre unidimensionnel $F_{11}(k, t)$ calculé numériquement à partir de la relation (27) est comparé aux résultats expérimentaux [10-13] sur la Fig. 1. On notera que l'évolution de cette solution avec le nombre de Reynolds est conforme à la réalité. Le spectre de transfert $T(k, t)$ est donné sur la Fig. 2. L'allure générale de la fonction est respectée mais cette fois l'action du nombre de Reynolds surtout au niveau des grosses structures paraît surestimée.

En ce qui concerne le champ scalaire les solutions sont obtenues par un calcul tout à fait similaire, il vient:

$$G(k, t) = \beta \epsilon_o \epsilon^{-1/3} L_o^{5/3} \frac{(kL_o)^4}{[1 + (kL_o)^2]^{17/6}} \exp[-\frac{3}{2}\beta(k\eta_o)^{4/3}] \quad (29)$$

et pour le spectre de transfert

$$H(k, t) = -\frac{\partial}{\partial k} \left\{ \left(\frac{\epsilon^{1/3} k^{5/3}}{\beta} - k \frac{d}{dt} \ln L_o \right) \left(\beta \epsilon_o \epsilon^{-1/3} L_o^{5/3} \frac{(kL_o)^4}{[1 + (kL_o)^2]^{17/6}} \exp[-\frac{3}{2}\beta(k\eta_o)^{4/3}] \right) \right\}. \quad (30)$$

Les solutions obtenues ici pour le champ scalaire donnent pour les petites structures un comportement du spectre qui correspond à celui prévu par Corrsin [14]. Si cette évolution peut être acceptée quand les nombres de Prandtl ou de Schmidt sont inférieurs ou égaux à l'unité [16], elle devra être rejetée quand ces nombres sont très supérieurs à 1, car elle ne permet pas de retrouver le développement de Batchelor [15] confirmé expérimentalement par les expériences de Gibson et Schwarz [17] et celles de Grant Hugues Vogel et Moilliet [18]. La "cassure" du spectre pour Sc ou $Pr \gg 1$ ne peut pas être représentée simplement ici car elle nécessiterait par exemple l'utilisation d'une troisième échelle de similitude.

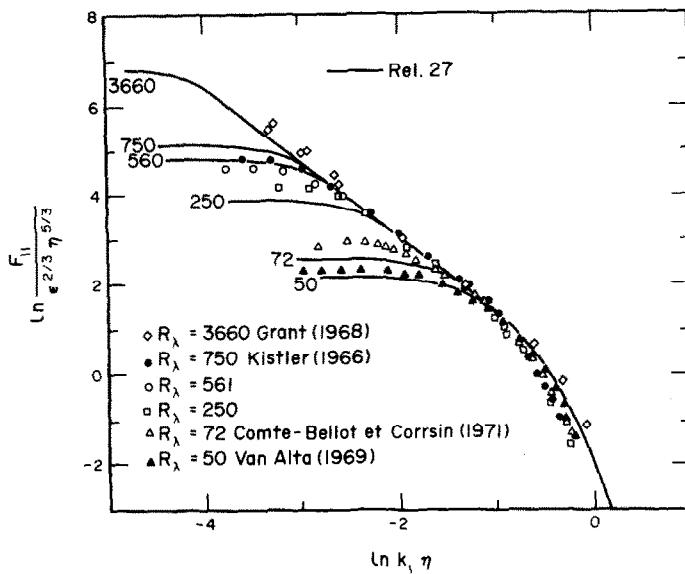
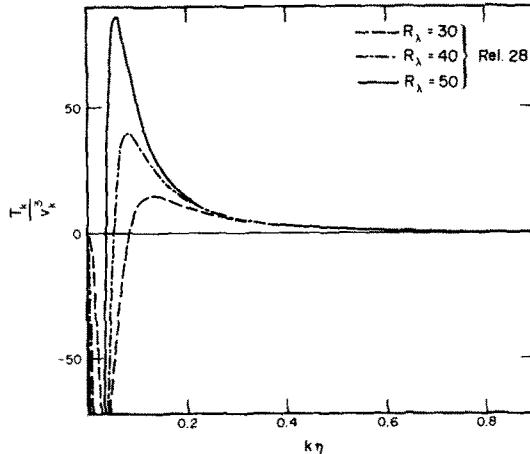
Il est alors important de préciser tout de suite le rôle joué par le nombre de Prandtl ou de Schmidt sur le terme de transfert lui-même:

Si l'on considère deux champs cinématiques l'un de viscosité v_1 l'autre de viscosité v_2 , on sait que les

spectres d'énergie sont confondus aux grands nombres d'onde dans la représentation réduite $F(k\eta)/v_k^2\eta$.

Soit maintenant un scalaire de diffusivité γ , si le champ scalaire est porté par le champ cinématique de viscosité v_1 dans le cas où le nombre de Prandtl ou de Schmidt est égal à 1, les petites structures scalaires sont, du point de vue qui nous occupe, pratiquement confondues avec celles du champ cinématique v_1 . Par contre si ce même champ scalaire caractérisé par γ est transporté par le champ cinématique de viscosité v_2 tel que le nombre de Prandtl ou de Schmidt soit très différent de l'unité, on sait que les petites structures scalaires peuvent être très différentes de celles du champ cinématique v_2 (lequel reste identique au champ v_1 quand il est considéré sous forme réduite).

Même sous une forme réduite $G(k\eta_o)/\theta_k^2\eta_o$, similaire à celle utilisée en cinématique, et surtout quand Pr ou $Sc \gg 1$ les spectres sont fortement modifiés aux grands

FIG. 1. Evolution du spectre F_{11} calculé en fonction de Re_λ et comparaison avec l'expérience.FIG. 2. Evolution du spectre de transfert $T(k, t)$ en fonction de Re_λ .

nombres d'ondes, c'est donc que l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(k, t) - H(k, t) = -2\gamma k^2 G(k, t) \quad (22)$$

voit ses solutions sous forme réduite ou non, altérées aux grands nombres d'ondes par le jeu du transfert H . Le transfert cinématique $T(k\eta)/v_K^3$ restant inchangé dans cette région du spectre, le transfert scalaire $H(k\eta)/v_K\theta_K^2$ ne peut évoluer dans cette région que par l'effet du nombre de Prandtl ou de Schmidt.

Cet effet du nombre de Prandtl ou de Schmidt sur le spectre de transfert aux grands nombres d'ondes n'a pas été pris en compte dans la solution de Corrsin 1964 et par conséquent dans la relation 29 ce qui explique certaines difficultés rencontrées lorsque Pr ou $Sc \gg 1$.

Le nombre de Prandtl ou de Schmidt agissant essentiellement sur les petites structures stationnaires du spectre nous tenterons un meilleur ajustement en nous limitant par la suite au domaine des grands nombres d'ondes.

III. EFFET DES PROPRIÉTÉS MOLECULAIRES SUR LES FINES STRUCTURES DE SPECTRE

Un ajustement des modèles algébriques sera tenté dans ce domaine en utilisant toujours la formulation:

$$H(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \sigma_o(k) G(k).$$

On postulera les conditions suivantes:

Les petites structures sont stationnaires sur l'intervalle k_+, ∞ ce qui implique un nombre de Reynolds suffisamment grand.

La solution $G(k)$ doit vérifier dans la zone inertielle du spectre

$$G(k) \sim \beta_1 \varepsilon_o e^{-1/3} k^{-5/3}.$$

La contribution des petites structures à l'intégrale du spectre de "dissipation" est prépondérante:

$$\varepsilon_o \simeq 2\gamma \int_{k_+}^{\infty} k^2 G(k) dk. \quad (31)$$

La solution $G(k)$ doit présenter aux très grands nombres d'onde une fonction de coupure que l'on prendra égale à:

$$\exp\{-\beta_2(k\eta_o)^2 - g_o(k)\} \quad (32)$$

où η_o est une échelle du type Kolmogorov à définir, β_2 une constante, $g_o(k)$ une fonction croissante avec k . Cette forme de fonction de coupure avec un terme en $-k^2$ dans l'exponentielle est discutable. Elle peut être choisie si l'on veut que la solution des équations de bilan spectral porte déjà la marque des phénomènes qui deviendront prépondérant dans la période finale de la turbulence bien que ce stade corresponde à une situation hors d'équilibre (voir Section 1).

L'équation (22) sous la forme:

$$H(k) = -\frac{\partial}{\partial k} \{\sigma_o(k) \cdot G(k)\} = 2\gamma k^2 G(k) \quad (33)$$

admet comme solution :

$$G(k) = \frac{\epsilon_\theta}{\sigma_\theta(k)} \exp \left\{ - \int_k^k \frac{2\gamma k^2}{\sigma_\theta(k)} dk \right\} \quad (34)$$

après calcul de la constante d'intégration par (31). La fonction $g_\theta(k)$ précédemment introduite dans la relation (32) sera telle que :

$$G(k) = \frac{\epsilon_\theta}{\sigma_\theta(k)} \exp \{ -\beta_2(k\eta_\theta)^2 - g_\theta(k) \}. \quad (35)$$

En supposant les exponentielles bornées dans le domaine considéré, l'identification de 34 et 35 donne avec l'ajustement de la solution dans la zone inertielle :

$$g_\theta(k) = \frac{3}{2} \frac{\beta_1}{C} \frac{\gamma}{\epsilon^{1/3}} k^{4/3}. \quad (36)$$

C'étant la constante d'intégration qui ne pourra être calculée qu'après avoir défini l'échelle caractéristique η_θ intervenant dans (32). La solution cherchée s'écrit alors [5] :

$$G(k) = \beta_1 \epsilon_\theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} \left(1 + C \frac{\beta_2}{\beta_1} \eta_\theta^2 \frac{\epsilon^{1/3}}{\gamma} k^{2/3} \right) \times \exp \left\{ -\beta_2(k\eta_\theta)^2 - \frac{3}{2} \beta_1 \frac{\gamma k^{4/3}}{C \epsilon^{1/3}} \right\}. \quad (37)$$

Le choix de l'échelle caractéristique du champ scalaire est lié à la détermination des paramètres physiques prépondérant dans cette zone du spectre. Les possibilités offertes sont résumées dans le tableau suivant :

$$(v\tau_\theta)^{1/2} \quad \tau_\theta = \tau = (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad (a)$$

$$\tau_\theta = (\gamma/\epsilon)^{1/2} \quad (b)$$

$$\eta = (v\tau)^{1/2}$$

$$\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2} \Rightarrow \eta_\theta =$$

$$(\gamma\tau_\theta)^{1/2} \quad \tau_\theta = \tau = (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad (c)$$

$$\tau_\theta = (\gamma/\epsilon)^{1/2} \quad (d)$$

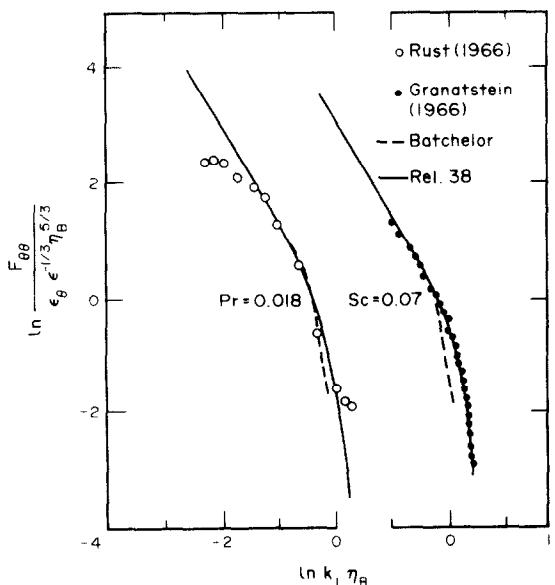


FIG. 3. Comparaison avec l'expérience, des spectres $F_{\theta\theta}$ calculés par la relation (38) pour $Pr < 1$ ou $Sc < 1$.

- (a) construction purement cinématique (Kolmogorov), (b) construction mixte, (c) construction mixte (Batchelor), (d) construction scalaire (Corrsin).

Avant d'atteindre la région spectrale où les phénomènes moléculaires deviennent important les structures turbulentes évoluent à un taux régi avant tout par le mécanisme turbulent cinématique.

Il est alors naturel de penser que le temps caractéristique $\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}$ joue un rôle irremplaçable, et cette dernière remarque élimine les combinaisons (b) et (d) (on notera que la construction classique des échelles avec une vitesse et un temps ne permet pas de raisonner simplement quand il s'agit d'un champ scalaire, mais l'introduction d'une "vitesse à caractère essentiellement cinématique" donne les mêmes conclusions).

Si $Pr \ll 1$ la diffusion va jouer un rôle d'autant plus important que le nombre de Prandtl ou de Schmidt est petit, l'échelle caractéristique doit être marquée par γ d'où :

$$\eta_\theta = \left(\frac{\nu\gamma^2}{\epsilon} \right)^{1/4} = \eta_B$$

La solution (37) s'écrit alors avec $C = \beta_1/\beta_2$ [19]

$$G(k) = \beta_1 \epsilon_\theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} [1 + Pr^{1/3} (k\eta_B)^{2/3}] \times \exp \left[-\beta_2(k\eta_B)^2 - \frac{3}{2} \beta_1 Pr^{-1/3} (k\eta_B)^{4/3} \right]. \quad (38)$$

Cette relation retrace graphiquement la solution de Corrsin pour $Pr < 1$ (et la description de Batchelor pour $Pr > 1$ voir Fig. 5). On notera dans cette solution le jeu implicite du nombre de Prandtl dans la fonction de coupure suivant que $Pr < 1$ ou $Pr > 1$, qui permet de retrouver la solution de Corrsin sans n'avoir jamais fait son choix d'échelle caractéristique.

Les courbes déduites dans la direction k_1 sont comparées aux résultats expérimentaux de Rust et Sesonske [20] et à ceux de Granatstein, Buchsbaum et Bugnolo [21] (Fig. 3). Cette comparaison semble satisfaisante avec la réserve que ces expériences ne font pas apparaître dans le spectre la loi en -3 prédite par Gibson [22] et obtenue expérimentalement par Clay [23] (voir Section IV).

Pour $Pr \gg 1$ il n'est pas évident de faire à priori le même choix que dans le cas où $Pr \ll 1$. En effet l'action de la diffusivité qui est de toute façon implicite par le jeu du nombre de Prandtl dans la relation (37) pourrait ne pas intervenir dans le choix de l'échelle caractéristique. Il y a donc en toute rigueur deux possibilités.

Si on choisit l'échelle de Batchelor le modèle obtenu redonne la description de Batchelor [15] (Fig. 4) qui est généralement considérée comme la plus probable.

Il faut quand même souligner que la comparaison avec les expériences du Laboratoire de Gibson et Schwartz [17] puis de Rust et Sesonske [20] (Fig. 5) n'est pas totalement convainquante, même si ces résultats expérimentaux sont critiquables à cause des problèmes d'intégration des sondes de mesure. Les résultats dans l'océan, de Grant [18] ne peuvent pas davantage être pris comme référence à cause des difficultés évidentes des mesures *in situ* et on re-

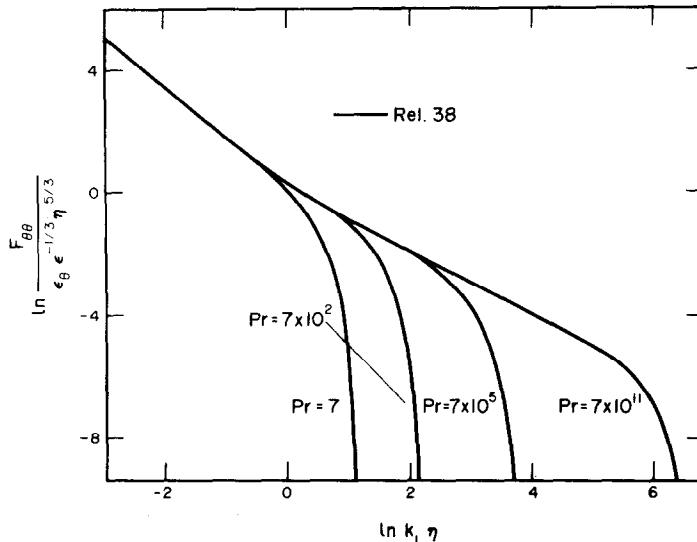
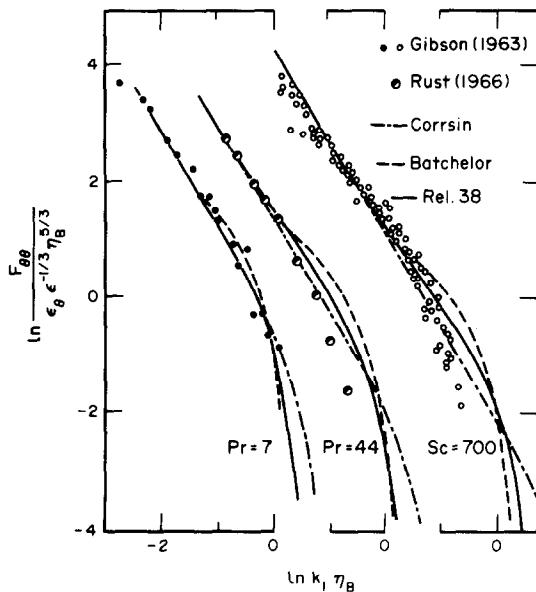
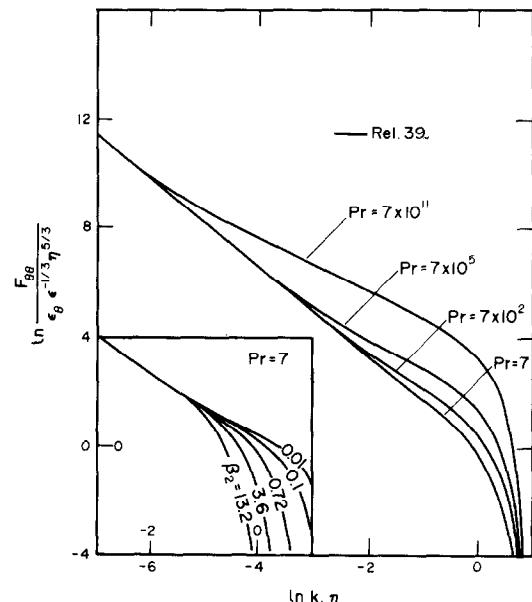
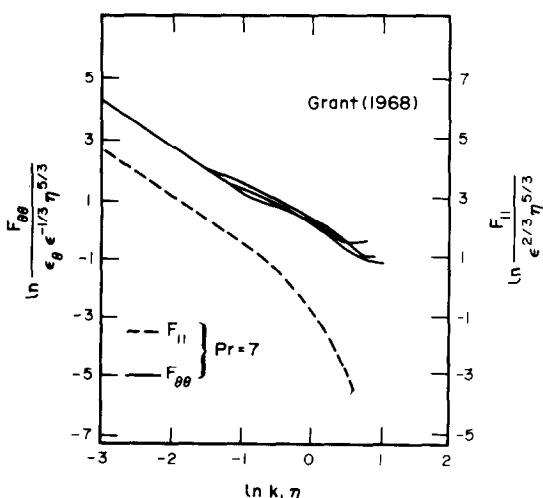
FIG. 4. Evolution du spectre $F_{\theta\theta}$ calculé par la relation 38 en fonction du nombre de Prandtl. $Pr > 1$.FIG. 5. Comparaison avec l'expérience, des spectres $F_{\theta\theta}$ calculés par la relation 38 pour Pr ou $Sc > 1$.FIG. 7. Evolution du spectre $F_{\theta\theta}$ calculé par la relation (39) en fonction du nombre de Prandtl, $Pr > 1$. Effet de la constante β_2 pour un nombre de Prandtl fixé.

FIG. 6. Instabilité des spectres de température mesurés dans l'océan pour une même valeur du nombre de Prandtl.

marquera (Fig. 6) l'instabilité de la forme spectrale obtenue. Dans ce dernier cas, la comparaison au moyen des résultats de Batchelor nécessite un ajustement de la constante β_2 dont les valeurs varient de 0.72 à 1.32.

Si l'on choisit maintenant, et uniquement pour $Pr \gg 1$, comme échelle caractéristique, l'échelle de Kolmogorov, l'équation (37) devient avec $C = (\beta_1/\beta_2)Pr^{-2/3}$

$$G(k) = \beta_1 \epsilon_0 \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} [1 + Pr^{1/3} (k\eta)^{2/3}] \times \exp [-\beta_2 (k\eta)^2 - \frac{3}{2} \beta_1 Pr^{-1/3} (k\eta)^{4/3}]. \quad (39)$$

Il est certain que la diffusivité qui n'apparaît plus dans la construction de l'échelle joue toujours un rôle par le biais du nombre de Prandtl, mais l'évolution du spectre en fonction de ce dernier paramètre ne cor-

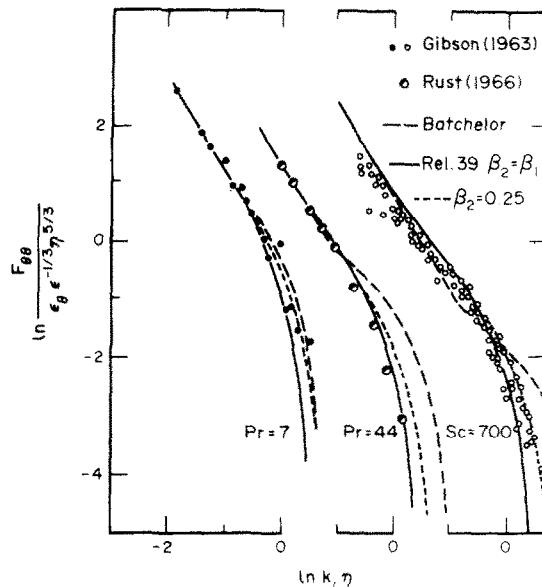


FIG. 8. Comparaison aux expériences *in situ*, des spectres $F_{\theta\theta}$ calculés par les relations (38) pour Pr ou $Sc > 1$ et pour deux valeurs de la constante β_2 .

respond plus à la description de Batchelor (Fig. 7).

Cette dernière relation (39) retrace pourtant de façon correcte les spectres expérimentaux obtenus en laboratoire pour $Pr = 7$ et 44 , $Sc = 700$ représentés sur la Fig. 8, avec une valeur de la constante $\beta_2 = 0.25$, en quelque sorte universelle pour les expériences de laboratoire. La relation (39) décrit aussi les expériences de Grant [18], dans l'océan, à condition, comme il avait été nécessaire avec le modèle de Batchelor de modifier la valeur de la constante β_2 soit ici $\beta_2 = 0.01$ (Fig. 9).

On se rend compte ici que le problème posé par l'effet du nombre de Prandtl ou de Schmidt sur un champ turbulent scalaire nécessite d'autres expériences avec des nombres de Prandtl ou de Schmidt très différents de l'unité.

IV. REMARQUES POUR Pr OU $Sc \ll 1$

Gibson [22], a montré l'existence d'une loi en -3 dans le spectre d'équilibre quand Pr ou $Sc \ll 1$. Cette loi, qui n'est pas donnée par le modèle précédent a été obtenue expérimentalement par Clay [23]. Il est possible d'apporter une modification du modèle présent de manière à retracer totalement la description de Gibson pour toute les valeurs du nombre de Prandtl ou de Schmidt. Mais il n'existe pas dans le cadre strict du modèle proposé ici, une hypothèse physique simple, analogue à la condition donnant la loi en -1 , qui puisse donner cette loi spectrale.

On a procédé ici par simple ajustement à la loi en -3 de Gibson, qui correspond à l'expression :

$$\sigma(k) = \frac{\beta_1^{-1} \epsilon^{1/3} k^{5/3} [1 + A Pr^{-1/3} (k \eta_B)^{4/3}]}{1 + (A + Pr^{1/3}) (k \eta_B)^{2/3} + A (k \eta_B)^2}. \quad (40)$$

qui donne: ($A = 4.64$, $\beta_1 = 0.59$)

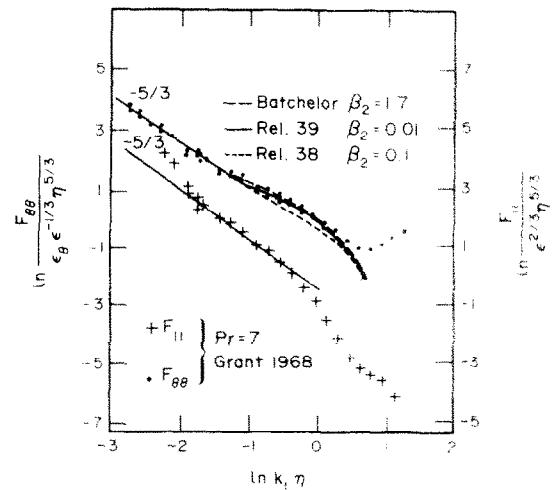


FIG. 9. Comparaison avec les expériences *in situ* des spectres $F_{\theta\theta}$ calculés par les relations (38) et (39).

$$\begin{aligned} G(k) = & \beta_1 \epsilon_B^{-1/3} k^{-5/3} \\ & \times \frac{1 + (A + Pr^{1/3}) (k \eta_B)^{2/3} + A (k \eta_B)^2}{[1 + A Pr^{-1/3} (k \eta_B)^{4/3}] (1 + 3\beta_1/2A)} \\ & \times \exp \left\{ \frac{3\beta_1}{A^{1/2}} Pr^{1/6} \operatorname{Arctg} [A^{1/2} Pr^{-1/6} (k \eta_B)^{2/3}] \right. \\ & \left. - 3\beta_1 (k \eta_B)^{2/3} - \beta_1 (k \eta_B)^2 \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

L'évolution avec le nombre de Prandtl ou de Schmidt du spectre unidimensionnel $F_{\theta\theta}(k_1, t)$ déduit de cette relation est donnée en Fig. 10 et correspond pratiquement à la description de Gibson. La courbe obtenue pour $Pr = 1$ présente une légère inflexion semblable à celle des courbes de nombre de Prandtl

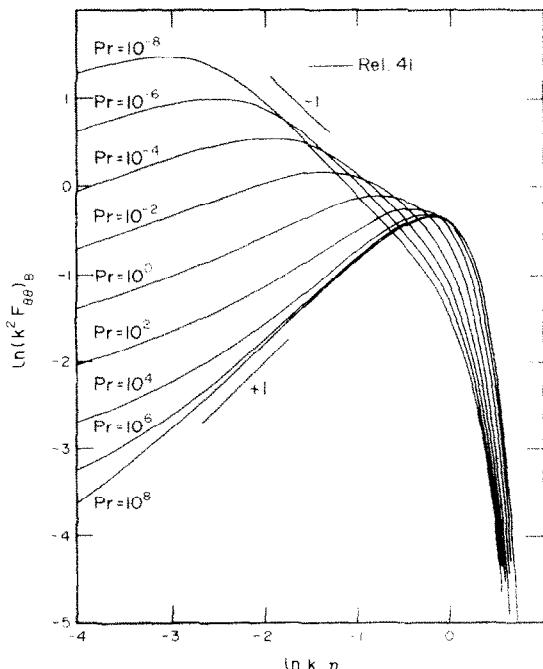


FIG. 10. Evolution du spectre $F_{\theta\theta}$ calculé par la relation (41) correspondant à la prédiction de Gibson (1968), en coordonnées de Batchelor.

supérieur à 1 ce qui a été observé expérimentalement dans les spectres *in situ* [24]. On montre par ce dernier ajustement les possibilités du modèle qui peut être facilement modifié pour retracer au mieux les résultats expérimentaux. Ceux-ci ne sont malheureusement pas nombreux et pas toujours fiables surtout pour Pr ou $Sc \gg 1$.

CONCLUSION

La comparaison entre un champ scalaire passif et un champ cinématique peut apporter un très grand nombre d'informations sur les mécanismes turbulents du fluide. En effet s'il est certain que le champ turbulent cinématique est essentiel pour l'existence du champ turbulent scalaire, la mise en évidence d'une certaine indépendance des structures d'un champ scalaire par rapport à celles du champ cinématique montre la complexité de la relation qui existe à fortiori entre les deux champs. Cette indépendance apparente n'est pas exclusivement le fait d'effets moléculaires au niveau des petites structures, elle existe aussi pour les grosses structures où elle est plus directement liée aux gradients [25].

Si une certaine indépendance existe dans le cas simple des champs turbulents scalaire et cinématique homogènes et isotropes, elle devrait être présente dans les termes de transfert. Aussi quand les transferts des deux champs peuvent être négligés, c'est à dire dans la période finale de la turbulence, une liaison très simple doit apparaître entre les deux champs. Cette liaison est obtenue ici en remarquant que le champ turbulent scalaire doit mourir au moins aussi vite que son support cinématique.

Même sous forme schématique, et en turbulence homogène et isotrope, la modélisation des termes de transfert est extrêmement délicate quand il faut rendre compte des structures non stationnaires du spectre. Si cette modélisation est possible en ce qui concerne le champ cinématique où l'on trace l'évolution du spectre en fonction du nombre de Reynolds, elle ne peut tenir compte du jeu moléculaire au sein des petites structures, quand le nombre de Prandtl ou de Schmidt est très différent de l'unité. Aussi c'est dans ce domaine particulier des petites structures stationnaires du spectre qu'il faut se placer pour étudier à travers le modèle proposé le rôle de ce dernier paramètre sur les termes de transfert.

La solution obtenue dans ce dernier domaine est telle que les propriétés locales du spectre d'équilibre sont issues du modèle de transfert proposé et de la forme de l'équation de bilan spectral, à travers un paramétrage faisant intervenir le nombre de Prandtl (ou de Schmidt). Une seule échelle caractéristique est alors à définir dans le domaine spectral considéré, et quelque soit le choix effectué entre les deux échelles de Kolmogorov ou de Batchelor, il est possible d'ajuster le modèle sur les résultats expérimentaux (on trouve entre autre la solution de Corrsin, et la description de Batchelor). Le spectre d'équilibre de Gibson [22], présentant une loi en -3 si Pr ou $Sc \ll 1$, et vérifiée expérimentalement par Clay [23], est obtenu par ajustement du modèle de transfert à cette loi, ce qui

montre son extrême flexibilité. De nouvelles expériences à nombre de Prandtl très différent de l'unité seraient nécessaires pour faire un choix définitif parmi les possibilités offertes. Elles devraient être suffisemment fiables et variées, pour tracer une évolution expérimentale du spectre en fonction du nombre de Prandtl ou de Schmidt, semblable à celle décrite théoriquement sur la Fig. 14.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Fulachier et R. Dumas, Répartitions spectrales des fluctuations thermiques dans une couche limite turbulente, *AGARD Conference on Turbulent Shear Flow*, Londres Proc. '93 (1971).
2. C. Rey, J. N. Gence, J. P. Schon et J. Mathieu, Etude de l'analogie entre les champs thermique et dynamique en turbulence homogène et isotrope dont les nombres de Reynolds et de Peclet sont petits, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **282**, Série B79 et B59 (1976).
3. L. Agostini et J. Bass, *Les Théories de la Turbulence*, Publ. Sci. Tech. Mn. de l'Air No. 237 (1950).
4. S. Corrsin, The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, *J. Aeronaut. Sci.* **18**(6), 417 (1951).
5. C. Rey, Effects du nombre de Prandtl, de la gravité et de la rugosité sur les spectres de turbulence cinématique et scalaires, Thèse d'Etat, Univ. Claude Bernard, Lyon (1977).
6. K. N. Helland, Energy transfer in high Reynolds number turbulence, Ph.D. Thesis Univ. of California, San Diego (1974).
7. K. N. Helland, C. W. Van Atta et G. R. Stegen, Spectral energy transfer in high Reynolds number turbulence, *J. Fluid Mech.* **79**(2), 337 (1977).
8. T. Von Karman, *Proc. Natn. Acad. Sci. U.S.A.* **34**, 530 (1948).
9. Y. H. Pao, Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wave numbers, *Physics Fluids* **28**(6), 1063 (1965).
10. H. L. Grant, R. W. Stewart et A. Moillet, Turbulence spectra from a tidal channel, *J. Fluid Mech.* **12**(2), 241 (1962).
11. A. L. Kistler et T. Wrebalovich, Grid turbulence at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* **26**(1), 37 (1966).
12. G. Comte-Bellot et G. Corrsin, Simple Eulerian time correlation of full and narrow-band velocity signals in grid-generated "isotropic" turbulence, *J. Fluid Mech.* **48**(2), 273 (1971).
13. C. W. Van Atta et W. Y. Chen, Measurement of spectral energy transfer in grid turbulence, *J. Fluid Mech.* **38**(4), 743 (1969).
14. S. Corrsin, Further generalisation of Onsager's cascade model for turbulent spectra, *Physics Fluids* **7**(8), 1156 (1964).
15. G. K. Batchelor, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent field, Part 1, *J. Fluid Mech.* **5**, 113 (1959).
16. G. K. Batchelor, I. D. Howell et A. A. Townsend, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent field, Part 2, *J. Fluid Mech.* **5**, 134 (1959).
17. C. H. Gibson et W. H. Schwarz, The universal equilibrium spectra of turbulent velocity and scalar fields, *J. Fluid Mech.* **16**(3), 365 (1963).
18. H. L. Grant, B. A. Hugues, W. M. Vogel et A. Moillet, The spectrum of temperature fluctuations in turbulent flow, *J. Fluid Mech.* **34**(3), 423 (1968).
19. C. Rey, R. Claude, J. P. Schon et J. Mathieu, Modèle de transfert spectral pour les petites structures de champs turbulents scalaire et cinématique, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **283**, Série B, 293 (1976).
20. J. H. Rust et A. Sesonske, Turbulent temperature fluctuations in mercury and ethylene glycol in pipe flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **9**, 215 (1966).

21. V. L. Granatstein, S. J. Buchsbaum et D. S. Bugnolo, Fluctuation spectrum of a plasma additive in a turbulent gas, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 504 (1966).
22. C. H. Gibson, Fine structure of scalar fields mixed by turbulence, I et II, *Physics Fluids* **11**(11), 2305 (1968).
23. J. P. Clay, Turbulent mixing of temperature in water, air and mercury, Ph.D. Thesis, Univ. of California, San Diego (1973).
24. F. H. Champagne, C. A. Friehe, J. C. La Rue et J. C. Wyngaard, Flux measurements, flux estimation techniques and fine-scalar turbulence measurements in the unstable surface layer over land, *J. Atmos. Sci.* **34**(3), 515 (1977).
25. R. Morel, C. Rey, M. Awad, J. Mathieu et J. P. Schon, Structure of the temperature field in the turbulent wake behind an asymmetrical heated plate (à paraître).

COMPARISONS BETWEEN KINEMATIC AND SCALAR FIELD IN SPECTRAL SPACE

Abstract—At the present time heat and mass transfer in turbulent fields are of great interest specially when the Prandtl (or Schmidt) number is very different from unity. First of all we present some results concerning turbulent isotropic fields, when transfer terms are neglected. Simple connections between the fields are emphasized if one supposes that the thermal fluctuating field is necessary supported by a kinematic one. With a simple model of transfer we obtain an approximate solution of the overall spectrum. However such a solution cannot give accurate information about the role played by the Prandtl (or Schmidt) number on the small turbulent structures. Special interest is focussed on these small structures. Assuming an equilibrium state and introducing the usual readjustments a general spectral function is given for scalar quantities.

Taking a convenient time scale this overall solution agrees with that of Batchelor and Corrsin.

VERGLEICH ZWISCHEN KINEMATISCHEM UND SKALAREM FELD IN EINEM SPEKTRALEN RAUM

Zusammenfassung—Gegenwärtig sind Wärmeübertragung und Stoffaustausch in turbulenten Feldern von großem Interesse, speziell wenn die Prandtl- oder Schmidt-Zahl sehr verschieden von eins ist. Zuerst legen wir einige Resultate vor für turbulente, isotrope Felder, wenn Übertragungssterme vernachlässigt werden. Einfache Zusammenhänge zwischen den Feldern werden hervorgehoben, wenn vorausgesetzt wird, daß ein veränderliches thermisches Feld notwendigerweise von einem kinematischen Feld herrührt. Mit einem einfachen Übertragungsmodell erhalten wir eine Näherungslösung des gesamten Spektrums. Jedoch kann eine solche Lösung keine genaue Information über den Einfluß der Prandtl- oder Schmidt-Zahl auf die kleinen turbulenten Strukturen. Diesen kleinen Strukturen wird spezielles Interesse entgegengebracht. Bei Annahme eines Gleichgewichtszustandes und Einführung der üblichen Vereinfachungen wird eine allgemeine spektrale Funktion für skalare Größen angegeben. Wird ein geeigneter Zeitmaßstab gewählt, stimmt diese allgemeine Lösung mit der von Batchelor und Corrsin überein.

СРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО И СКАЛЯРНОГО ПОЛЕЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация—В настоящее время большой интерес вызывает проблема переноса тепла и массы в турбулентной области, в особенности, когда число Прандтля (Шмидта) значительно отличается от единицы.

В статье сначала рассматриваются некоторые результаты исследования турбулентных изотропных полей при пренебрежении обменными членами. Подчеркивается наличие простых связей между полями в том случае, если предполагается, что тепловое пульсационное поле обязательно усиливается кинематическим. Затем с помощью простой модели переноса получено приближенное решение для всего спектра. Однако, такое решение не может дать точную информацию о том влиянии, которое число Прандтля (Шмидта) оказывает на небольшие турбулентные структуры. Эти небольшие структуры вызывают особый интерес. В предположении наличия равновесного состояния и после соответствующих преобразований получена спектральная функция для скалярных величин. При выборе соответствующего масштаба времени предлагаемое общее решение совпадает с решением Бэтчелора и Корсина.